Math93.com

DNB - Brevet des Collèges 2017 Métropole

29 juin 2017
Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Le sujet est noté sur 50 points : 45 points sur les exercices et 5 points de maitrise de la langue.

Exercice 1. — 4 points

Dans une urne contenant des houles vertes et des boules bleues, on tire au hasard une boule et on regarde sa couleur. On replace ensuite la boule dans l'urne et on mélange les boules. La probabilité d'obtenir une boule verte est $p_1 = \dfrac{2}{5}$.

1. Expliquer pourquoi la probabilité d'obtenir une boule bleue est égale à $\dfrac{3}{5}$.

L'urne ne contient que des boules vertes ou bleues donc l'évènement « obtenir une boule bleue » est l'évènement contraire de « obtenir une boule verte ». De ce fait la probabilité d'obtenir une boule bleue est égale à :

$$\begin{aligned} p_2 &= 1 - p_1 = 1 - \frac{2}{5} \\ &= \frac{5}{5} - \frac{2}{5} \\ &= \frac{5-2}{5} \\ p_2 &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

2. Paul a effectué 6 tirages et a obtenu une boule verte à chaque fois. Au 7ᵉ tirage, aura-t-il plus de chances d'obtenir une boule bleue qu'une boule verte?

Au 7ᵉ tirage, Paul aura toujours 2 chances sur 5 d'obtenir un boule verte et 3 chances sur 5 d'obtenir un boule bleue. Il aura donc plus de chance d'obtenir une boule bleue.

3. Déterminer le nombre de boules bleues dans cette urne sachant qu'il y a 8 boules vertes.

On suppose qu'il y a équiprobabilité. Notons N le nombre total de boules.

- Puisque la probabilité d'obtenir une boule verte est $p_1 = \dfrac{2}{5}$ et qu'il y a équiprobabilité on a :

$$p_1 = \frac{8}{N} = \frac{2}{5} \Longleftrightarrow N = \frac{8 \times 5}{2} = 20$$

- Il y a donc 20 boules au total et 8 boules vertes donc 12 boules bleues.

Exercice 2. 6 points

On donne le programme suivant qui permet de tracer plusieurs triangles équilatéraux de tailles différentes. Ce programme comporte une variable nommée "côté". Les longueurs sont données en pixels. On rappelle que l'instruction s'orienter à 90 , *signifie que l'on se dirige vers la droite.*

Numéros d'instruction	Script
1	quand [drapeau] est cliqué
2	effacer tout
3	aller à x: -200 y: -100
4	s'orienter à 90
5	mettre côté à 100
6	répéter 5 fois
7	triangle
8	avancer de côté
9	ajouter à côté -20

Le bloc **triangle**

```
définir triangle
stylo en position d'écriture
répéter 3 fois
    avancer de côté
    tourner ↺ de 120 degrés
relever le stylo
```

1. Quelles sont les coordonnées du point de départ du tracé ?

Les coordonnées du point de départ du tracé sont : $\underline{(-200\ ;\ -100)}$.

2. Combien de triangles sont dessinés par le script ?

La boucle présente l'instruction « *répéter 5 fois* » donc <u>5 triangles</u> sont dessinés par le script.

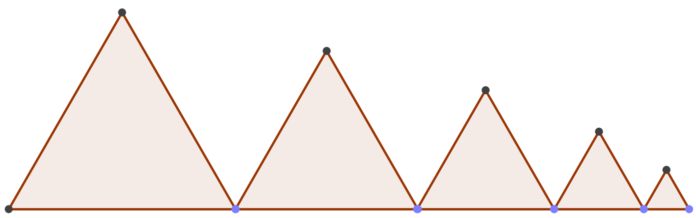
3.

3. a. Quelle est la longueur (en pixels) du côté du deuxième triangle tracé ?

Dans la boucle on trouve l'instruction « *ajouter à côté* -20 » donc le premier triangle équilatéral tracé sera de côté 100 pixels et le deuxième de côté $\underline{100-20=80 \text{ pixels}}$.

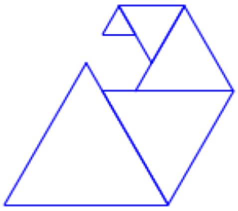
3. b. Tracer à main levée l'allure de la figure obtenue quand on exécute ce script.

On obtient 5 triangles équilatéraux de côtés 100, 80, 60, 40 et 20 pixels.



4. On modifie le script initial pour obtenir la figure ci-contre. Indiquer le numéro d'une instruction du script après laquelle on peut placer l'instruction 

pour obtenir cette nouvelle figure.

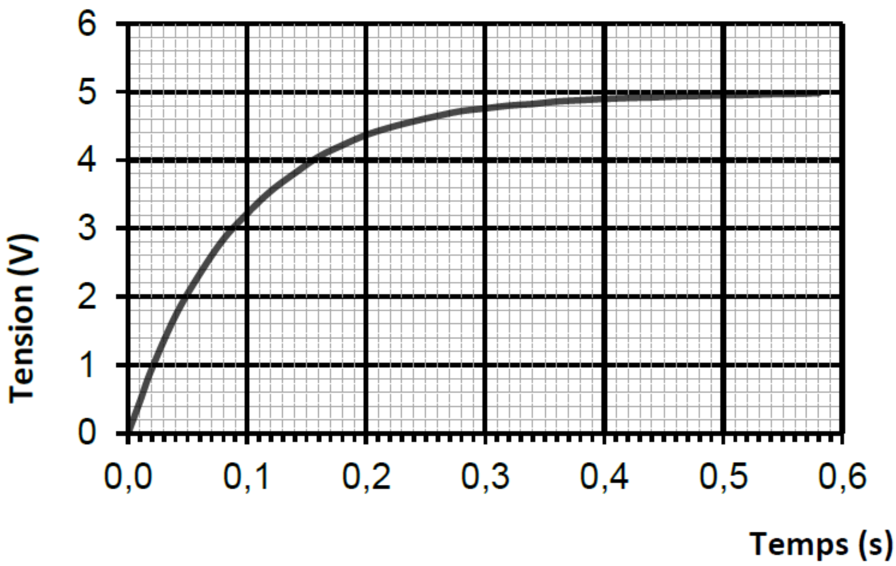


Le numéro d'une instruction du script après laquelle on peut placer l'instruction 

pour obtenir cette nouvelle figure est la 8 ou la 9.

Exercice 3. 4 points

Un condensateur est un composant électronique qui permet de stocker de l'énergie électrique pour la restituer plus tard. Le graphique suivant montre l'évolution de la tension mesurée aux bornes d'un condensateur en fonction du temps lorsqu'il est en charge.



1. S'agit-il d'une situation de proportionnalité ? Justifier.
la courbe représentative de la situation n'est pas une droite passant par l'origine du repère, donc il ne s'agit pas d'une situation de proportionnalité.

2. Quelle est la tension mesurée au bout de 0,2 s ?
La tension mesurée au bout de 0,2 s est environ 4,4 V.

3. Au bout de combien de temps la tension aux bornes du condensateur aura-t-elle atteint 60% de la tension maximale qui est estimée à 5 V ?
60% de la tension maximale qui est estimée à 5 V représente :

$$5V \times 0,6 = 3V$$

Or la tension de 3 V est atteinte au bout d'environ 0,09 seconde.

Exercice 4. 8 points

Les panneaux photovoltaïques permettent de produire de l'électricité à partir du rayonnement solaire. Une unité courante pour mesurer l'énergie électrique est le kilowatt-heure, abrégé en kWh.

1. *Le plus souvent, l'électricité produite n'est pas utilisée directement, mais vendue pour être distribuée dans le réseau électrique collectif. Le prix d'achat du kWh, donné en centimes d'euros, dépend du type d'installation et de sa puissance totale, ainsi que de la date d'installation des panneaux photovoltaïques. Ce prix d'achat du kWh est donné dans le tableau ci-dessous.*

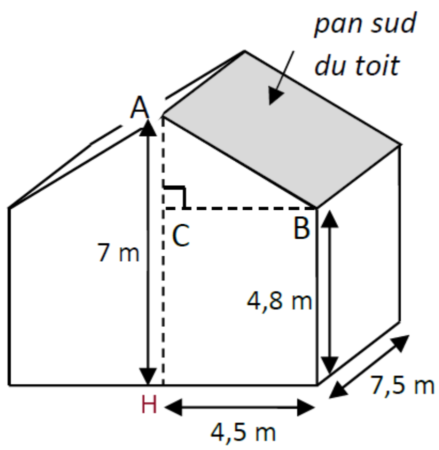
Tarifs d'un kWh en ***centimes d'euros***

		Date d'installation			
Type d'installation	Puissance totale	Du 01/01/15 au 31/03/15	du 01/04/15 au 30/06/15	du 01/07/15 au 30/09/15	du 01/10/15 au 31/12/15
Type A	0 à 9 kW	26,57	26,17	25,78	25,39
Type B	0 à 36 kW	13,46	13,95	14,7	14,4
	36 à 100 kW	12,79	13,25	13,96	13,68

En mai 2015, on installe une centrale solaire du type B, d'une puissance de 28 kW. Vérifier que le prix d'achat de 31 420 kWh est d'environ 4 383 .
D'après le tableau, en mai 2015 (colonne du 01/04/15 au 30/06/15), le prix du kWh pour une centrale de type B, d'une puissance comprise entre 0 et 36kWh est de 13,95 centimes d'euros donc 0,139 5 euros.
Donc le prix d'achat de 31 420 kWh est de :

$$31\,420 \times 0,1395 = 4\,383,09 \approx \underline{4383\text{ €}}$$

2. Une personne souhaite installer des panneaux photovoltaïques sur la partie du toit de sa maison orientée au sud. Cette partie est grisée sur la figure ci-contre. Elle est appelée pan sud du toit. La production d'électricité des panneaux solaires dépend de l'inclinaison du toit. Déterminer, au degré près, l'angle $\widehat{ABC}$ que forme ce pan sud du toit avec l'horizontale.



Le triangle ABC est rectangle en C avec $BC = 4,5$ m et en supposant que le point C appartient au segment [AH] on a : $AC = 7\text{ m} - 4,8\text{ m} = 2,2\text{ m}$ donc

$$\tan\widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} \iff \tan\widehat{ABC} = \frac{2,2}{4,5}$$

Et donc

$$\widehat{ABC} = \arctan\left(\frac{2,2}{4,5}\right) \approx \underline{26°}$$

3.

3. a. Montrer que la longueur AB est environ égale à 5 m.
Dans le triangle CAB rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$\begin{aligned}
AB^2 &= CA^2 + CB^2\\
AB^2 &= 4{,}5^2 + 2{,}2^2\\
AB^2 &= 20{,}25 + 4{,}84\\
AB^2 &= 25{,}09
\end{aligned}$$

Or AB est positif puisque c'est une longueur, l'unique solution possible est donc :

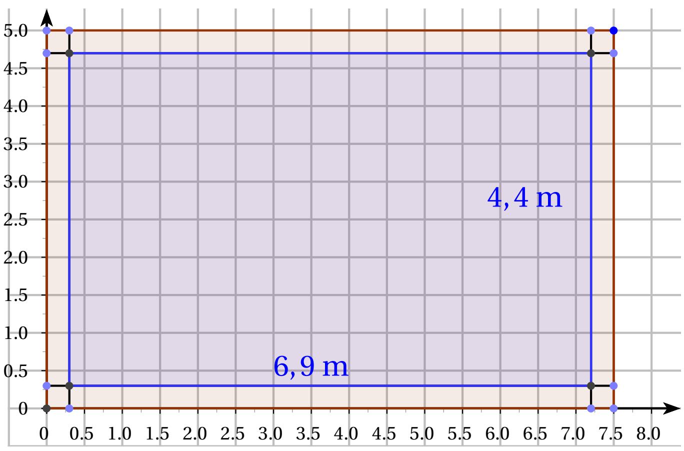
$$\begin{aligned}
AB &= \sqrt{25{,}09}\\
AB &\approx \underline{5{,}01 \text{ m}}
\end{aligned}$$

La longueur AB est environ égale à 5 m.

3. b. Les panneaux photovoltaïques ont la forme d'un carré de 1 m de côté. Le propriétaire prévoit d'installer 20 panneaux. Quel pourcentage de la surface totale du pan sud du toit sera alors couvert par les panneaux solaires ? On donnera une valeur approchée du résultat à 1% près.

- On suppose (rien ne nous le dit) que le pan sud du toit est un rectangle de côtés 7,5 m et environ 5 m. Son aire est donc d'environ :
$$\mathscr{A}_1 \approx 7{,}5 \times 5 = 37{,}5 \text{ m}^2$$
- Le propriétaire prévoit d'installer 20 panneaux de forme carré de 1 m de côté, donc l'aire totale des panneaux est :
$$\mathscr{A}_2 = 20 \times 1 \text{ m}^2 = 20 \text{ m}^2$$
- Le pourcentage de la surface totale du pan sud du toit qui sera alors couvert par les panneaux solaires est de :
$$\frac{20}{37{,}5} \approx \underline{53\%}$$

3. c. La notice d'installation indique que les panneaux doivent être accolés les uns aux autres et qu'une bordure d'au moins 30 cm de large doit être laissée libre pour le système de fixation tout autour de l'ensemble des panneaux. Le propriétaire peut-il installer les 20 panneaux prévus ?



Les panneaux doivent être accolés les uns aux autres et une bordure d'au moins 30 cm de large (soit 0,3 m) doit être laissée libre. Donc on cherche à installer les 20 panneaux dans un rectangle de côtés 6,9 m et 4,4 m (en bleu sur le dessin) puisque :

$$\begin{cases} 7{,}5 - 2 \times 0{,}3 = 6{,}9 \text{ m}\\ 5 - 2 \times 0{,}3 = 4{,}4 \text{ m}\end{cases}$$

On peut installer sur la largeur au maximum 4 carrés de 1 m de côté et sur la longueur au maximum 6 carrés soit un total de $\underline{6 \times 4 = 24 \text{ carrés}}$ de 1 m de côté .
Le propriétaire peut donc installer les 20 panneaux prévus.

Exercice 5. 8 points

1. Lors des Jeux Olympiques de Rio en 2016, la danoise Pernille Blume a remporté le 50 m nage libre en 24,07 secondes. A-t-elle nagé plus rapidement qu'une personne qui se déplace en marchant vite, c'est-à-dire à 6 km/h ?

- Méthode 1.
  La danoise Pernille Blume a parcouru 50 m =0,05 km en 24,07 secondes , donc en 1 h soit 3 600 secondes elle parcourt :

Distance	0,05 km	$d = ?$
Temps	24,07 s	3 600 s (1h)

$$d = \frac{0,05 \times 3600}{24,07} \approx \underline{7,5 \text{ km}} > 6 \text{ km}$$

  Elle a donc nagé plus rapidement qu'une personne qui se déplace en marchant vite, c'est-à-dire à 6 km/h.
  Remarque : sa vitesse de nage est d'environ 7,5 km/h.

- Méthode 2.
  - La danoise Pernille Blume a parcouru 50 m en 24,07 secondes , donc elle nage a une vitesse de
  $$v_1 = \frac{50 \text{ m}}{24,07 \text{ s}} \approx 2,08 \text{ m/s}$$
  - Un marcheur marche a une vitesse de 6 km/h ce qui donne en mètres par seconde :
  $$v_2 = \frac{6 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{6000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} \approx 1,67 \text{ m/s}$$
  - Conclusion : Pernille Blume a donc nagé plus vite qu'un personne se déplaçant à 6 km/h.

- Méthode 3.
  - La danoise Pernille Blume a parcouru 50 m en 24,07 secondes , donc elle nage a une vitesse de
  $$v_1 = \frac{50 \text{ m}}{24,07 \text{ s}} = \frac{50}{24,07} \times \underbrace{\frac{3600}{1000}}_{\times 3,6} \text{ km/h} \approx 7,48 \text{ km/h} > 6 \text{ km/h}$$
  - Conclusion : Pernille Blume a donc nagé plus vite qu'un personne se déplaçant à 6 km/h.

2. On donne l'expression : $E = (3x+8)^2 - 64$.

2. a. Développer E.
Les identités remarquables n'étant plus explicitement au programme on peut développer ainsi :

$$E = (3x+8)^2 - 64$$
$$E = (3x+8)(3x+8) - 64$$
$$E = (3x)^2 + 24x + 24x + \underbrace{8^2 - 64}_{0}$$
$$E = \underline{9x^2 + 48x}$$

Remarque : il n'était pas précisé qu'il fallait aussi réduire même si cela est toujours sous-entendu. De fait, un résultat sous la forme non réduite $(9x^2 + 48x + 64 - 64)$ *était accepté.*

2. b. Montrer que E peut s'écrire sous forme factorisée : $3x(3x+16)$.

- Méthode 1 : On vient de montrer que $E = 9x^2 + 48x$ donc on cherche à factoriser cette expression :

$$E = 9x^2 + 48x$$
$$E = \underline{3x} \times 3x + \underline{3x} \times 16$$
$$E = \underline{3x\left(3x+16\right)}$$

- Méthode 2 : on pouvait aussi développer l'expression $3x(3x+16)$ et montrer que l'on obtenant la forme obtenue lors de la question (2a.). Mais attention, dans ce cas il ne faut pas écrire l'égalité $E = ...$ de suite mais rédiger cela sous la forme :
  - D'une part en développant nous avons :
  $$3x(3x+16) = 3x \times (3x) + 3x \times 16 = 9x^2 + 48x$$
  - D'autre part nous avons montré lors de la question (2a.) que $E = 9x^2 + 48x$.
  - Conclusion : de ce fait $\underline{E = 3x(3x+16)}$.

2. c. Résoudre l' équation $(3x+8)^2-64=0$.

On va utiliser la forme factorisée de E obtenue lors de la question (2b) et appliquer le théorème de l'équation produit nul :

$$(3x+8)^2-64=0 \Longleftrightarrow 3x(3x+16)=0$$

C'est une équation produit nul, et par théorème, un produit est nul si l'un au moins des facteurs est nul (et réciproquement) soit :

$$\begin{aligned}(3x+8)^2-64=0 &\Longleftrightarrow \left(3x=0\right) \text{ ou } \left(3x+16=0\right)\\ &\Longleftrightarrow \left(x=0\right) \text{ ou } \left(3x=-16\right)\\ (3x+8)^2-64=0 &\Longleftrightarrow \left(x=0\right) \text{ ou } \left(x=-\frac{16}{3}\right)\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont donc : $x=0$ et $x=-\dfrac{16}{3}$.

3. *La distance d de freinage d'un véhicule dépend de sa vitesse et de l'état de la route. On peut la calculer à l'aide de la formule suivante : $d=k\times V^2$ avec d distance de freinage, V vitesse du véhicule en m/s et k coefficient ($k=0,14$ sur route mouillée et 0,08 sur route sèche).* **Quelle est la vitesse d'un véhicule dont la distance de freinage sur route mouillée est égale à 15 m ?**

On est sur route mouillée donc $k=0,14$ et puisque la distance de freinage est égale à 15 m on a l'égalité :

$$d=k\times V^2 \Longleftrightarrow 15=0,14\times V^2 \Longleftrightarrow V^2=\frac{15}{0,14}$$

Or puisque V est positif, l'unique solution de cette équation est :

$$\boxed{V=\sqrt{\frac{15}{0,14}}\approx 10,35 \text{ m/s}} \quad \text{soit environ 37 km/h.}$$

Exercice 6. IMC — 8 points

1. *Dans une entreprise, lors d'une visite médicale, un médecin calcule l'IMC de six des employés. Il utilise pour cela une feuille de tableur dont voici un extrait :*

	A	B	C	D	E	F	G
1	Taille (en m)	1,69	1,72	1,75	1,78	1,86	1,88
2	Masse (en kg)	72	85	74	70	115	85
3	IMC (*)	25,2	28,7	24,2	22,1	33,2	24,0
4	(*) valeur approchée au dixième						

1. a. Combien d'employés sont en situation de surpoids ou d'obésité dans cette entreprise ?

- D'après le document 2, on est en situation de surpoids ou d'obésité quand l'IMC est supérieure ou égale à 25. Ceci concerne 3 employés de cette entreprise sur les 6 qui ont passé la visite.
- Conclusion : en toute rigueur on ne peut répondre à la question qui concerne tous les employés de l'entreprise puisque l'on ne connait pas l'IMC des autres employés (on en a interrogé seulement 6).
  Les deux réponses suivantes étaient donc acceptées avec justification, « *3 employés sur 6 sont en surpoids ou obésité* » ou « *on ne sait pas car on ne connait pas l'IMC des autres* ».

1. b. Laquelle de ces formules a-t-on écrite dans la cellule B3, puis recopiée à droite, pour calculer l'IMC ? Recopier la formule correcte sur la copie.

L'IMC se calcule en divisant la masse par le carré de la taille donc la formule écrite dans la cellule B3, puis recopiée à droite, pour calculer l'IMC est : $\underline{= B2/(B1 * B1)}$.

Remarque : la dernière formule avec des $ va figer la colonne B et n'est donc pas valable.

2. *Le médecin a fait le bilan de l'IMC de chacun des 41 employés de cette entreprise. Il a reporté les informations recueillies dans le tableau suivant dans lequel les IMC ont été arrondis à l'unité près.*

IMC	20	22	23	24	25	29	30	33	Total
Effectif	9	12	6	8	2	1	1	2	41
Effectifs Cumulés croissants	9	21	27	35	37	38	39	41	
Rangs	*1 à 9*	*10 à 21*	*22 à 27*	*28 à 35*	*36 à 37*	*38*	*39*	*40 à 41*	
		Médiane							

2. a. Calculer une valeur approchée, arrondie à l'entier près, de l'IMC moyen des employés de cette entreprise.

La moyenne des IMC est :

$$\overline{m} = \frac{20 \times 9 + 22 \times 12 + \ldots + 33 \times 2}{41} = \frac{946}{71} \approx \underline{23}$$

2. b. Quel est l'IMC médian ? Interpréter ce résultat.

- Il y a 41 valeurs, et $41 \div 2 = 20,5$, donc l'IMC médian sera la 21e valeur qui, d'après le tableau des effectifs cumulés croissants, est $\underline{22}$.
- Interprétation : l'IMC médian est de 22, cela signifie qu'au moins 50% des employés ont une IMC inférieure ou égale à 25 et au moins 50% des employés ont une IMC supérieure ou égale à 25.

2. c. On lit sur des magazines : « On estime qu'au moins 5% de la population mondiale est en surpoids ou est obèse ». Est-ce le cas pour les employés de cette entreprise ?

- *Remarque : Un problème ici car les IMC ayant été arrondis à l'unité, on ne sait pas si les 2 personnes ayant une IMC arrondis à 25 sont en surpoids ou pas puisque leur IMC peut être inférieure à 25 (entre 24,5 et 25) ou supérieure à 25 (entre 25 et 25,5). Cela n'impacte pas le résultat final cependant.*

- On considère que 2 employés ont une IMC égale à 25, et 4 autres employés une IMC supérieure à 25. Donc 6 employés sur 41 ont une IMC supérieure ou égale à 25 ce qui représente en pourcentage :

  $$\frac{6}{41} \approx 0,1463415 \approx \underline{14,6\% > 5\%}$$

  Donc effectivement, pour cette entreprise, au moins 5% de la « *population* » est en surpoids ou est obèse.
- Remarque : si on considère que les 2 employés qui ont une IMC arrondie à 25 avaient une IMC inférieure à 25, on a seulement 4 employés sur 41 en surpoids ou obésité ce qui représente en pourcentage :

  $$\frac{4}{41} \approx 0.0976 \approx \underline{9,76\% > 5\%}$$

  Donc effectivement, pour cette entreprise, au moins 5% de la « *population* » est en surpoids ou est obèse.

Exercice 7. Volume — 7 points

Léo a ramassé des fraises pour faire de la confiture.

1. Il utilise les proportions de sa grand-mère : 700 g de sucre pour 1 kg de fraises. Il a ramassé 1,8 kg de fraises. De quelle quantité de sucre a-t-il besoin ?

Sucre	700 g	x?
Fraises	1 kg	1,8 kg

Pour 1,8 kg de fraise il lui faudra donc une masse de sucre de :

$$x = \frac{700 \times 1,8}{1} = 1\ 260 \text{ g} = \underline{1,26 \text{ kg}}$$

2. Après cuisson, Léo a obtenu 2,7 litres de confiture. Il verse la confiture dans des pots cylindriques de 6 cm de diamètre et de 12 cm de haut, qu'il remplit jusqu'à 1 cm du bord supérieur. Combien pourra-t-il remplir de pots ?
Rappels : 1 litre = 1 000 cm^3 et $V_{cylindre} = \pi \times R^2 \times h$.

- Volume d'un pot.
  Le volume d'un pot cylindrique de 6 cm de diamètre donc 3 cm de rayon et de 11 cm de haut (12 cm moins le centimètre du bord) est :
  $$V = \pi \times 3^2 \times 11 = \underline{99\pi \text{ cm}^3} \approx 311 \text{ cm}^3$$
- Après cuisson, Léo a obtenu 2,7 litres de confiture ce qui représente 2 700 cm^3. Or on a :
  $$\frac{2\ 700}{99\pi} \approx 8,68$$
  Conclusion : il lui faudra donc 9 pots de confiture au total mais il ne pourra en remplir complètement que 8.

  Remarque : les réponses 8 et 9 étaient acceptées.

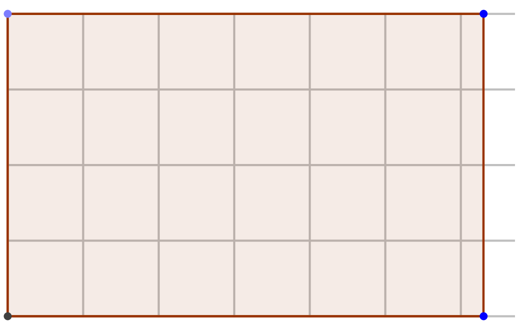
3. *Il colle ensuite sur ses pots une étiquette rectangulaire de fond blanc qui recouvre toute la surface latérale du pot.*

3. a. Montrer que la longueur de l'étiquette est d'environ 18,8 cm.
La longueur L d'une étiquette correspond au périmètre du cercle de base du cylindre. De ce fait

$$L = 2\pi \times 3 = 6\pi \approx \underline{18,8 \text{ cm}}$$

3. b. Dessiner l'étiquette à l'échelle $\frac{1}{3}$.

- La hauteur de l'étiquette est 12 cm et à l'échelle $\frac{1}{3}$ on obtient une hauteur de $\frac{1}{3} \times 12 = 4$ cm.
- La longueur de l'étiquette est d'environ 18,8 cm, et à l'échelle $\frac{1}{3}$ on obtient une longueur d'environ $\frac{18,8}{3} = 6,3$ cm.
- Il suffit donc de tracer un rectangle de 4 cm sur 6,3 cm.



Fin du devoir